

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A. 1.** Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 5**

**2.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

**Μονάδες 8**

**B.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

**1.**  $|z|^2 = z^2$ , για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$ .

**Μονάδες 3**

**2.** Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $\alpha + \beta i$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο  $M(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 3**

**3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$ .

**Μονάδες 3**

4. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[α,β]$  και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(α,β)$ , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $ξ ∈ (α,β)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(ξ) = \frac{f(β) - f(α)}{β - α}.$$

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 2 + 3i \quad \text{και} \quad z_2 = (1 - i)^2 + 3i^{2009} + 1.$$

- α. Να αποδείξετε ότι  $z_2 = 1 + i$ .

**Μονάδες 8**

- β. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού  $\bar{z}_1 - z_2$ .

**Μονάδες 7**

- γ. Να εκφράσετε το πηλίκο  $\frac{z_1}{z_2}$  στη μορφή  $κ + λi$ , όπου

$$κ, λ ∈ ℝ.$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} αx^2 + β, & x \leq 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases} \quad \text{με } α, β ∈ ℝ.$$

- α. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , να αποδείξετε ότι  $α + β = 5$ .

**Μονάδες 5**

- β.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0=1$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha=1$  και  $\beta=4$ .

**Μονάδες 10**

- γ.** Για  $\alpha=1$  και  $\beta=4$ , να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ ,  $x \neq 0$ , στο  $-\infty$  και στο  $+\infty$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Για  $\lambda \in \mathbb{R}$  δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- I.** Αν η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0=1$ , να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ .

**Μονάδες 4**

**II.** Για  $\lambda = 0$

- α.** να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 8**

- β.** να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της  $f$  που είναι παράλληλες προς την ευθεία  $y=9x$ .

**Μονάδες 8**

- γ.** να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) - \sqrt{x} = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα  $(0,1)$ .

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**