

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

*Μονάδες 9*

**B.** Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

**1.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

*Μονάδες 2*

**2.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

*Μονάδες 2*

**3.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) = 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

*Μονάδες 2*

4. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

*Μονάδες 2*

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

*Μονάδες 2*

6. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

*Μονάδες 2*

7. Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z = \alpha + \beta i$  ισχύει :

$$|z| = \alpha^2 + \beta^2$$

*Μονάδες 2*

8. Για το μιγαδικό αριθμό  $i$  ισχύει :  
 $i^4 = 1$  .

*Μονάδες 2*

### **ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = 3 - 4i$

- α.** Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό  $z_1 + 5z_2$

*Μονάδες 6*

**β.** Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό  $\frac{z_2}{z_1}$

*Μονάδες 6*

**γ.** Να αποδείξετε ότι το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού  $z_1$  είναι:  $\text{Arg}(z_1) = \frac{3\pi}{4}$

*Μονάδες 6*

**δ.** Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό  $z_1^8$ .

*Μονάδες 7*

### **ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ .

**α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

*Μονάδες 10*

**β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(-1, f(-1))$ .

*Μονάδες 5*

**γ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

*Μονάδες 10*

#### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} & , \text{ αν } x < 2 \\ -x^2 + k & , \text{ αν } x \geq 2 \end{cases}$

όπου  $k \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε :

**α.** το  $k$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι  
συνεχής στο  
 $x_0 = 2$  ,

*Μονάδες 7*

**β.** το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ,

*Μονάδες 5*

**γ.** το ρυθμό μεταβολής της  $f$  στο  $x_0 = 4$   
και

*Μονάδες 5*

**δ.** την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής  
παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \frac{f(x)}{x+3}$   
στο  $-\infty$  .

*Μονάδες 8*