

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ &
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

β) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$;

Μονάδες 3

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$ και $f(α) \neq f(β)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 6,5

B. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 0$ για την οποία ισχύει :
 $x[f(x) - 2x + 2] = \eta x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι ώστε $w = \frac{z - 3i}{1 + i}$.

A. α) Αν $w = 2 - 2i$, τότε το μέτρο του μιγαδικού z είναι :

A. 3, B. 4, Γ. 5, Δ. 2.

Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 5

β) Αν $|w| = 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 7,5

B. α) Αν $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{x + y - 3}{2}, \quad \operatorname{Im}(w) = \frac{-x + y - 3}{2}.$$

Μονάδες 6

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $\operatorname{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x \ln x - 2x$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα της μονοτονίας της f .

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f''(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $g(x) = \frac{f'(x) + f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή,

Μονάδες 8

β) $[f(x) \cdot e^x]' = e^{2x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

Μονάδες 8

γ) ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ