ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2001
ΔΕΣΜΗ ΤΕΤΑΡΤΗ (4η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0\in(\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=\xi$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-1-\eta\mu 2x$, $x\in R$, είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η εξίσωση $x^3+2x-1=\eta\mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (0,1).

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} 5x+5y=\lambda\omega \\ 2x+y=2\omega \\ x+3y=3\omega \end{cases} \qquad ,\lambda\in R$$

α. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σύστημα έχει δύο τουλάχιστον διαφορετικές λύσεις.

β. Αν (x_1, y_1, ω_1) και (x_2, y_2, ω_2) είναι δύο διαφορετικές λύσεις του συστήματος, να αποδείξετε ότι

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \omega_1\omega_2$$

Β. Θεωρούμε στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τη γραμμή με εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

α. Να αποδείξετε ότι η προηγούμενη εξίσωση παριστάνει κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο (0,0) και Α(-6, 8) είναι τα άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Η συνάρτηση $f : R \to R$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = 0,$$

όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(\alpha) = f(\beta)$

β. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

Β. ΄Εστω η συνάρτηση

$$f(x) = 2x + \frac{4}{x}, \qquad x>0$$

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\lambda$, $x=\lambda+1$, όπου $\lambda>0$, είναι

$$E(\lambda) = 2\lambda+1+ 4\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$$

β. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x x\,\sigma\upsilon\nu t\,dt \quad , \ x \in R$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x \ , \ x\in R.$$

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Β. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha x^2+\beta x}{x-2} , \quad x\in R-\{2\}$$

όπου $\alpha, \beta \in R$.

α. Αν η ευθεία $\varepsilon: y= 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, ποιες είναι οι τιμές των α, β;

β. Έστω Ω = $\left\{\frac{\alpha}{2},\ \alpha,\ \beta,\ 2\beta\right\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, όπου οι α, β έχουν τις τιμές που προκύπτουν στο προηγούμενο ερώτημα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}(\lambda - 1)x^3 + 2x^2 + 2001, x \in R, \lambda \in \Omega$$

και το ενδεχόμενο

$$E = \{\lambda \in \Omega / \text{η συνάρτηση } g \text{ είναι κυρτή στο } R\}$$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Ε.