ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2001
ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Έστω δειγματικός χώρος Ω και Α ένα ενδεχόμενό του. Αν Α΄ είναι το αντίθετο ενδεχόμενο του Α, να αποδείξετε ότι

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Β. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x - 2y + 3\omega - \varphi = \kappa \\ 3x + y + 2\omega + 4\varphi = \lambda \\ 5x + 4y + \omega + 9\varphi = \mu \end{cases}$$

όπου $\kappa, \lambda, \mu \in R$.

α. Αν το σύστημα είναι συμβιβαστό, να αποδείξετε ότι

$$\mu+\kappa-2\lambda=0$$

β. Αν $(x, y, \omega, \varphi) = (1, 2, 1, 1)$ είναι μία λύση του συστήματος, να βρείτε όλες τις λύσεις του.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_\alpha: \alpha x - y = 0 \quad \text{και} \quad \zeta_\alpha: x+\alpha y=2, \ \alpha \in R.$$

α. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$, οι ευθείες ε_α διέρχονται από σταθερό σημείο Α και οι ευθείες ζ_α διέρχονται από σταθερό σημείο Β, τα οποία και να προσδιορίσετε.

β. Αν Μ(x, y) είναι το σημείο τομής των $ε_α$ και $ζ_α$, να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $α \in R$ το Μ κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

Β. Δίνονται τα πολυώνυμα

$P(z) = z^2 - 2z + 2$ και $Q(z) = z^3 + αz^2 + βz - 2$, όπου $α, β \in R$.

α. Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 του P(z) και να αποδείξετε ότι $z_1^{12} + z_2^{12} = -2^7$.

β. Αν μια ρίζα του πολυωνύμου P(z) είναι και ρίζα του πολυωνύμου Q (z), να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, $x>0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=x_0$, όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακροτάτου της f.

Β. Έστω η συνάρτηση $f: [α, β] \to R$, η οποία είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(α)=2β$, $f(β)=2α$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $ξ_1, ξ_2 \in (α, β)$ τέτοια ώστε

$$f'(ξ_1)\, f'(ξ_2) = 4.$$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α. Έστω η συνάρτηση

$f(x) = x^3 - 3x^2συν2α + 2xσυν^2 2α + ημ^2 2α$, $x \in R$ και $α \in R$.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.

Β. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x}, \text{ για κάθε } x \in R.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $Α(0,f(0))$.