ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2000
ΔΕΣΜΗ ΤΕΤΑΡΤΗ (4η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Β. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια, ώστε:

$$2xf(x)+(x^2+1)\, f'(x)=e^x \text{ για κάθε } x\in R, \text{ με } f(0)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\beta & -1\\ \beta & -2\end{bmatrix}$, όπου $\beta\in R$.

Αν $\lambda\in R$, θεωρούμε το 2x2 γραμμικό σύστημα $AX=\lambda X$ όπου $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας-στήλη των αγνώστων.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\beta\in R$ υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές του $\lambda\in R$, για τις οποίες το παραπάνω γραμμικό σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

Β. Έστω Α ένας 2x2 πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$A=\begin{bmatrix}2+|A| & 4|A|+1\\ 1 & 2|A|\end{bmatrix} \text{ και } |A|>0$$

όπου $|A|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα Α.

α) Να αποδείξετε ότι A= $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

β) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας B=5I-A, όπου I ο 2x2 μοναδιαίος πίνακας, είναι αντίστροφος του A και να βρείτε τον πίνακα X για τον οποίο ισχύει :

$$BX=A$$

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

A. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο R.

α) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^7 f(x)dx$$

β) Έστω ότι

$$4\int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2004$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,7)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)= 334$.

B. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f:R \to R$ που ικανοποιεί την ισότητα : $\int_0^x \left(1+t^2\right)f(t)\,dt = x^2 + \int_0^1 6x\left(t^2+t\right)dt$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+1}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της A (0, f(0)).

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

A. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=x^2-4x+3$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)+f(y)=0 \text{ με } x,y \in R$$

παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x.

Β. Έστω Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και X,Y ενδεχόμενά του τέτοια, ώστε $X \subseteq Y$.

Έστω P(X), P(Y) είναι οι πιθανότητες των X,Y αντιστοίχως.

Έστω ότι οι πραγματικοί αριθμοί P(X), P(Y) είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f, με

$$f(x)=4x^3-5x^2+2x+2000,\ x \in R.$$

Να υπολογίσετε

α) τις πιθανότητες P(X), P(Y)

β) τις πιθανότητες $P(X \cap Y)$, $P(X \cup Y)$ και $P(Y \cap X')$ όπου X΄ το αντίθετο ενδεχόμενο του X.